UNIVERSITÉ PARIS-DIDEROT / PARIS-7	COURS OPTIONNEL DE THÉORIE DES ENSEMBLES MASTER 1 DE MATHÉMATIQUES

LA THÉORIE DES ENSEMBLES DE ZERMELO-FRÆNKEL (ZF)

I. **EXT** : L'AXIOME D'EXTENSIONNALITÉ.

Tous deux ensembles possédant les mêmes éléments sont égaux.

- $\forall a\, \forall b\, (\, \forall x\, (x \in a \Leftrightarrow x \in b) \Rightarrow a = b\,)$.

II. **SCR** : LE SCHÉMA DE COMPRÉHENSION RESTREINT. (Une liste infinie d'axiomes.)

Pour chaque formule $\Phi(x, \vec{p})$ *on a l'axiome suivant :*

COMP_Φ ***: Pour tout ensemble** a**, et pour tous** $\vec{p}$ **, il existe un ensemble** b **tel que :***

$\forall x\, (\, x \in b \;\Leftrightarrow\; x \in a \wedge \Phi(x, \vec{p})\,)$.

- $\forall \vec{p}\, \forall a\, \exists b\, \forall x\, (\, x \in b \;\Leftrightarrow\; x \in a \wedge \Phi(x, \vec{p})\,)$.

L'unique ensemble vide sera noté $\varnothing$.

III. **PAIRE** : L'AXIOME DE LA PAIRE.

***Pour tous** a, b**, il existe un ensemble** p **dont les éléments sont précisément** a **et** b.*

- $\forall a\, \forall b\, \exists p\, \forall x\, (\, x \in p \;\Leftrightarrow\; (x = a) \vee (x = b)\,)$.

La *paire* de a et b sera notée $\{a, b\}$; le *singleton* $\{a, a\}$ sera noté $\{a\}$.

IV. **RÉUNION** : L'AXIOME DE LA RÉUNION.

***Pour tout ensemble** a**, il existe un ensemble** u **dont les éléments sont les éléments des éléments de** a.*

- $\forall a\, \exists u\, \forall x\, (\, x \in u \;\Leftrightarrow\; \exists y\, (\, x \in y \wedge y \in a)\,)$.

Cet axiome, avec **EXT**, justifiera l'existence de $u = \bigcup a$. Si $a = \{b, c\}$, $\bigcup a$ sera noté $b \cup c$.

V. **PARTIES** : L'AXIOME DE L'ENSEMBLE DES PARTIES.

***Pour tout ensemble** a**, il existe un ensemble** P **dont les éléments sont les parties de** a.*

- $\forall a\, \exists P\, \forall x\, (\, x \in P \;\Leftrightarrow\; x \subseteq a\,)$.

Ici, $x \subseteq a$ abrège : $\forall y\, (\, y \in x \Rightarrow y \in a\,)$.

VI. **INFINI** : L'AXIOME DE L'INFINI.

- $\exists \Omega\, (\, \varnothing \in \Omega \;\wedge\; \forall x\, (\, x \in \Omega \;\Rightarrow\; x \cup \{x\} \in \Omega\,)$.

[La forme utilisée par Zermelo : $\exists \Omega\, (\, \varnothing \in \Omega \wedge \forall x\, (\, x \in \Omega \;\Rightarrow\; \{x\} \in \Omega\,)$.]

VII. **SR** : LE SCHÉMA DE REMPLACEMENT. (Une liste infinie d'axiomes.)

Pour chaque formule $\Phi(x, y, \vec{p})$ *on a l'axiome suivant :*

REMPL_Φ : ***Si** " $\Phi(x, y, \vec{p})$ **est fonctionnelle en** x "**, alors pour tout** a**, il existe** b **tel que :***

$\forall y\, (\, y \in b \;\Leftrightarrow\; \exists x\, (x \in a \wedge \Phi(x, y, \vec{p}))\,)$.

- $\forall \vec{p}\, [\, \forall x\, \exists!\, y\, \Phi(x, y, \vec{p}) \;\Rightarrow\; \forall a\, \exists b\, \forall y\, (\, y \in b \;\Leftrightarrow\; \exists x\, (x \in a \wedge \Phi(x, y, \vec{p}))\,)\,]$

VIII. **FONDATION** : L'AXIOME DE FONDATION.

***Pour tout ensemble non vide** A**, il existe** $m \in A$ **tel que, pour tout** $x \in A$**,** $x \notin m$.*

[Un tel m est dit $\in$*-minimal dans* A.]

Les axiomes **I–VI** forment la théorie **Z** de ZERMELO.

L'axiome suivant ne fait pas partie de la liste officielle des axiomes de **Z** ou de **ZF**.

AC. L'AXIOME DU CHOIX.

***Pour tous ensembles** A, B**, et toute relation** $R \subseteq A \times B$ **, si** $(\forall x \in A)(\exists y \in B)(\, xRy\,)$ **, il existe une fonction** $\gamma : A \to B$ **telle que** $(\forall x \in A)(\, xR\gamma(x)\,)$.*